EX43

Partie A

1) Soit $h(x) = x + \ln x$; $x \in]0, +\infty[$

$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$

h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[) = IR$

Comme $0 \in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0, +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$

Par suite l'équation (E) admet α comme unique solution dans $]0, +\infty[$

On a $h(\frac{1}{3}) \times h(\frac{2}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$

2) $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \ln(\frac{1}{x}) = 0$

b) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow h(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \alpha$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$

c) $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

On a : $\frac{3}{2} \le x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{2}} \le e^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{4} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{4}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow |\varphi'(x)| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$

3) $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \varphi(V_n) \ . \ n \in IN \end{cases}$

a) * pour $n = 0$

$\frac{3}{2} \le V_0 \le 2$ (Vrai)

* supposons que : $\frac{3}{2} \le V_n \le 2$ et montrons que : $\frac{3}{2} \le V_{n+1} \le 2$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$ donc φ décroissante sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$

$\frac{3}{2} \le V_n \le 2 \Rightarrow \varphi(2) \le \varphi(V_n) \le \varphi(\frac{3}{2})$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}} \le V_{n+1} \le e^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le V_{n+1} \le 2$

Conclusion : $\frac{3}{2} \le V_n \le 2$, pour tout $n \in IN$

b) On a φ est dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$

et $|\varphi'(x)| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\alpha}$ et $V_n \in [\frac{3}{2}, 2]$

donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$|\varphi(V_n) - \varphi(\frac{1}{\alpha})| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} |V_n - \frac{1}{\alpha}| \Rightarrow$

$|V_{n+1} - \frac{1}{\alpha}| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} |V_n - \frac{1}{\alpha}|$

c) Montrons par récurrence que :

$|V_n - \frac{1}{\alpha}| \le (\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}})^n |2 - \frac{1}{\alpha}|$

$\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \in]-1, 1[$ Donc $\lim (\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}})^n = 0$

Et par suite $\lim V_n = \frac{1}{\alpha}$

Qarray.tn - Aqra Blech Qarray.tn